Sur une conjecture de Kátai

Par JEAN-LOUP MAUCLAIRE à Orsay (France)

On rappelle le résultat suivant dû à E. WIRSING ([1]): *Si f est additive, si $f(n+1)-$ $-f(n)=O(1)$, alors $f(n)=c\log n+u(n)$, où u est fonction additive bornée.*

I. KÁTAI [2] a conjecturé que le suivant théorème est aussi valable:

Théorème. *Si f et g sont additives, s'il existe $M\in R^+$ tel que $|g(n+1)-f(n)|\leqq M$ pour tout n, alors $f(n)=c\log n+u(n)$ et $g(n)=c\log n+v(n)$, où u et v sont additives bornées.*

Le but de cet article est de prouver ce théorème.

Démonstration.

I. On a d'abord $|g(4n-1)-g(2n)|\leqq K$ pour tout n de N^*. En effet, $|g(4m+3)-$ $-f(4m+2)|\leqq M$. Or, $f(4m+2)=f(2)+f(2m+1)$. Donc, $|g(4m+3)-f(2m+1)|-$ $-f(2)|\leqq M$.

Or, $|g(2m+2)-f(2m+1)|\leqq M$. D'où, $|g(4m+3)-g(2m+2)-f(2)|\leqq 2M$.

En posant $m+1=n$, on a $|g(4n-1)-g(2n)-f(2)|\leqq 2M$; d'où, en posant $K=2M+|f(2)|$, $|g(4n-1)-g(2n)|\leqq K$.

II. On démontre maintenant que g s'écrit $g(n)=g^*(n)+v(n)$, où $g^*(n)$ est complètement additive, et $v(n)$ est additive bornée.

Pour cela, on prouve d'abord le lemme suivant:

Lemme. *Si g est additive et si $|g(4n-1)-g(2n)|\leqq K$ pour tout n de N^*, on a, pour tout $k\geqq 2$ et tout entier p strictement positif:*

$$(O)\qquad |g(2^{2k-1}p^k)-kg(2p)|\leqq (k+1)K.$$

Preuve. Pour $2\leqq l\leqq k$, nous avons:

$$\left|g\left((4p)^l n-\frac{(4p)^l-1}{4p-1}\right)-g\left((4p)^{l-1}n-\frac{(4p)^{l-1}-1}{4p-1}\right)-g(2p)\right|\leqq K.$$

De plus, $|g(4pn-1)-g(2pn)|\leqq K$. Par sommation pour $1\leqq l\leqq k$, nous obtenons:

(A) $$\left|g\left\{(4p)^k n-\frac{(4p)^k-1}{4p-1}\right\}-g(2pn)-(k-1)g(2p)\right|\leqq kK.$$

Prenons $n=\dfrac{(4p)^k-1}{4p-1}\times((4p)^k+1)$. Nous obtenons:

(B) $$g\left\{(4p)^k n-\frac{(4p)^k-1}{4p-1}\right\}=g\left\{\frac{(4p)^k-1}{4p-1}\right\}+g\{((4p)^k+1)(4p)^k-1\}$$

car le P. G. C. D. de $\dfrac{(4p)^k-1}{4p-1}$ et $((4p)^k+1)(4p)^k-1$ est 1.

De plus, nous avons:

(C) $$g(2pn)=g(2p)+g\left\{\frac{(4p)^k-1}{4p-1}\right\}+g((4p)^k+1).$$

En tenant compte des formules (B) et (C), (A) s'écrit:

(D) $$|g[((4p)^k+1)(4p)^k-1]-kg(2p)-g((4p)^k+1)|\leqq kK.$$

On remarque alors que:

(E) $$|g\{((4p)^k+1)(4p)^k-1\}-g\{((4p)^k+1)p^k2^{2k-1}\}|\leqq K$$

et que:

(F) $$g[((4p)^k+1)\times p^k\times 2^{2k-1}]=g((4p)^k+1)+g(p^k2^{2k-1}).$$

En tenant compte de (F), (D) et (E) montrent que pour $k\geqq 2$ on a (O), ce qui termine la preuve du lemme.

1. Faisons d'abord dans cette formule $p=2^{l-2}$, avec $l\geqq 2$.

On voit que, pour k et $l\geqq 2$,

$$|g(2^{kl-1})-kg(2^{l-1})|\leqq(k+1)K.$$

On a de même:

$$|g(2^{kl-1})-lg(2^{k-1})|\leqq(l+1)K.$$

Par suite:

$$|lg(2^{k-1})-kg(2^{l-1})|\leqq(k+l+2)K.$$

En divisant par lk, nous avons:

(*) $$\left|\frac{g(2^{k-1})}{k}-\frac{g(2^{l-1})}{l}\right|\leqq\left(\frac{2}{lk}+\frac{1}{l}+\frac{1}{k}\right)K.$$

La suite $\left\{\dfrac{g(2^{k-1})}{k}\right\}$ est donc une suite de Cauchy et tend donc vers une limite finie λ.

Comme $\frac{g(2^k)}{k}=\frac{g(2^k)}{k+1}\times\frac{k+1}{k}$, on voit que $\frac{g(2^k)}{k}$ tend vers λ quand k tend vers $+\infty$.

On remarque en outre que si dans (*) on fait tendre l vers $+\infty$, on a: $\left|\frac{g(2^{k-1})}{k}-\lambda\right|\leqq\frac{K}{k}$, c'est-à-dire que, pour tout $k\geqq 2$,

$$|g(2^{k-1})-k\lambda|\leqq K.$$

2. Pour p impair, la formule du lemme s'écrit:

$$|g(2^{2k-1})+g(p^k)-kg(p)-kg(2)|\leqq (k+1)K.$$

Comme $|g(2^{2k-1})-kg(2)|\leqq(k+1)K$, nous avons:

$$|g(p^k)-kg(p)|\leqq 2(k+1)K.$$

En prenant $p=q^{k'}$ avec q impair, nous voyons que, pour k et $k'\geqq 2$,

$$|g(q^{kk'})-k'g(q^{k'})|\leqq 2(k+1)K.$$

On a de même:

$$|g(q^{kk'})-k'g(q^k)|\leqq 2(k'+1)K,$$

et; par suite: $|k'g(q^k)-kg(q^{k'})|\leqq 2(k+k'+2)K$, c'est-à-dire:

$$(**)\qquad \left|\frac{g(q^k)}{k}-\frac{g(q^{k'})}{k'}\right|\leqq 2\times\left(\frac{2}{kk'}+\frac{1}{k'}+\frac{1}{k}\right)K.$$

On voit que, q impair, la suite $\left\{\frac{g(q^k)}{q^k}\right\}$ est une suite de Cauchy, et tend donc vers une limite finie quand k tend vers $+\infty$.

3. On voit que pour tout m de N^*, la suite $\left\{\frac{g(m^k)}{k}\right\}$ tend vers une limite finie quand k tend vers $+\infty$.

On vient de le montrer pour m impair. Pour n pair, on peut écrire: $m=2^\alpha m'$, avec $\alpha\geqq 1$, et m' impair.

On a alors:

$$\frac{g(m^k)}{k}=\frac{g(2^{k\alpha}m'^k)}{k}=\frac{g(2^{k\alpha})}{k}+\frac{g(m'^k)}{k}=\alpha\frac{g(2^{k\alpha})}{k\alpha}+\frac{g(m'^k)}{k}.$$

Comme m' est impair, le deuxième terme tend vers une limite finie quand $k\to+\infty$; le premier terme tend vers $\alpha\lambda$.

4. On définit alors g^* et v sur N^* par:

$$g^*(m)=\lim_{k\to+\infty}\frac{g(m^k)}{k}\quad\text{et}\quad v(m)=g(m)-g^*(m).$$

On va montrer que v est bornée, puis, que g^* est complètement additive, de sorte que v est additive.

5. D'abord si m est impair, en faisant $q=m$ et $k=1$ dans (**), et en faisant tendre k' vers $+\infty$, on a:

$$|g(m)-g^*(m)| \leqq 2K, \quad \text{ou} \quad |v(m)| \leqq 2K.$$

Si maintenant m est pair, on pose $m=2^\alpha m'$, $\alpha>1$, m' impair et l'on a $g^*(m)=\alpha\lambda+$ $+g(m')$ d'où

$$v(m) = g(m)-\alpha\lambda-g^*(m') = g(2^\alpha)+g(m')-\alpha\lambda-g^*(m') =$$
$$= v(m')+\big(g(2^\alpha)-(\alpha+1)\lambda\big)+\lambda.$$

Compte tenu de la remarque de (1), et du fait que $v(m')$ est borné, $v(m)$ est borné.

6. On démontre que g^* est complètement additive.

D'abord, g^* est additive; car, pour $(m,n)=1$, on a:

$$\frac{g[(mn)^k]}{k} = \frac{g(m^k)}{k}+\frac{g(n^k)}{k},$$

et par passage à la limite pour k tendant vers $+\infty$

$$g^*(mn) = g^*(m)+g^*(n).$$

De plus, g^* est complètement additive car, pour p premier et $\alpha>0$, on a:

$$\frac{g[(p^\alpha)^k]}{k} = \alpha\times\frac{g(p^{\alpha k})}{\alpha k},$$

d'où, par passage à la limite: $g^*(p^\alpha)=\alpha g^*(p)$.

III. On démontre maintenant que $g^*(n)=c\log n$.

Notre formule initiale peut s'écrire: $|g^*(n)+v(n)-f(n-1)|\leqq M$, d'où:

$$|g^*(n)-f(n-1)| \leqq M+|v(n)|.$$

Comme $v(n)$ est bornée, on pose $M+\|v\|_\infty=M'$, et l'on a:

(***) $$|g^*(n)-f(n-1)| \leqq M'.$$

En remplaçant n par $4n^2$, on a: $|g^*(4n^2)-f(4n^2-1)|\leqq M'$, c'est-à-dire:

$$|2g^*(2n)-f(2n-1)-f(2n+1)| \leqq M'.$$

Or, $|g^*(2n)-f(2n-1)|\leqq M'$; donc, $|g^*(2n)-f(2n+1)|\leqq 2M'$. Mais $|g^*(2n+2)-$ $-f(2n+1)|\leqq M'$; donc, $|g^*(2n+2)-g^*(2n)|\leqq 3M'$, c'est-à-dire:

$$|g^*(n-1)-g^*(n)| \leqq 3M'.$$

D'après le résultat de Wirsing cité précédemment, on a: $g^*(n)=c\log n+h(n)$, où h est additive bornée. Comme g^* est complètement additive, h est identique à zéro.

IV. On démontre alors que $f(n)=c\log n+u(n)$, où u est additive bornée.

En effet, l'inégalité (***) donne $|c\log(n+1)-f(n)|\leqq M'$, c'est-à-dire

$$|c[\log(n+1)-\log n]+c\log n-f(n)| \leqq M',$$

d'où $|c\log n-f(n)|\leqq M'+|c|\times\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, c'est-à-dire:

$$|c\log n-f(n)| \leqq M'+|c|\log 2.$$

Donc $f(n)$ s'écrit bien $f(n)=c\log n+u(n)$, où $u(n)$ est additive bornée.

Références

[1] E. Wirsing, On a characterization of Log n as an additive function, *Proc. Rome Conference of Number Theory* (1968).

[2] I. Kátai, Some results and problems on the theory of additive functions, *Acta Sci. Math.*, **30** (1969), 306—312.

DPT DE MATHÉMATIQUES, BÂTIMENT 425
UNIVERSITÉ DE PARIS XI
91405 ORSAY, FRANCE

(Reçu le 26 janvier 1973)